I.C.A.R.E.

SESSION 1994

MATHEMATIQUES 2
OPTIONS T ET TA
(durée totale 4 heures)

GEOMETRIE

(durée 1 h 30 environ)

n.b. : les parties I, II et III sont indépendantes.

I

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct Oxyz.

On considère la surface (S) d'équation $z(x^2+y^2) = 2kxy$; x est non nul, k est une constante non nulle.

1°) Déterminer les droites tracées sur (S) et parallèles au plan xOy.

2°) On considère le plan P d'équation $z = x$ et la courbe (Γ) intersection du plan P et de la surface (S).
Soit (γ) la projection orthogonale de (Γ) sur xOy. Reconnaître (γ) et en déduire que (Γ) est une ellipse, dont on donnera le centre et la valeur de ses grand axe et petit axe.

3°) Soit $\theta \to r(\theta)$ une fonction de classe C^2 sur R.
On considère la courbe (C) tracée sur (S) et paramétrée par :

$$M_\theta \begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \\ z = \text{une fonction de } \theta \text{ à déterminer} \end{cases}$$

a) Déterminer un vecteur, de composantes $\alpha(\theta)$, $\beta(\theta)$, $\lambda(\theta)$, normal à (S) en M_θ.

b) Montrer que le plan osculateur en M_θ à (C) est tangent à (S) si et seulement si $\alpha x'+\beta y'+\lambda z' = 0$.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur r pour que (C) vérifie : en chaque point M_θ, le plan osculateur à (C) est tangent à (S). La condition est une équation différentielle (E) d'ordre 1.
Constater que, parmi les solutions de (E), figurent les solutions : $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$, avec a non nul. On appelle (C_a) les courbes correspondantes.

d) Etudier et tracer la représentation graphique de (c_a), projection orthogonale de (C_a) sur le plan xOy.

II

On considère la courbe (Γ) d'équations :

$$\begin{cases} y^2 = z \\ x = 1 \end{cases}$$

1°) Déterminer la nature de (Γ).

2°) Déterminer les équations des droites Δ_k, situées dans le plan $z = k$, et s'appuyant sur Oz et sur (Γ).En déduire l'équation de la surface (Σ) engendrée par la famille des droites Δ_k.

3°) On considère un point M_0, autre que O, appartenant à (Σ) et de coordonnées x_0, y_0, z_0.

a) Déterminer l'équation du plan P_0, tangent à (Σ) en M_0.

b) Montrer que, si z_0 n'est pas nul, l'intersection de P_0 avec (Σ) se décompose en une droite D_0, dont on donnera les équations, et une courbe plane (Γ_0).
Déterminer l'équation de (γ_0), projection orthogonale sur xOy de (Γ_0) .

c) Montrer que, pour y_0 non nul, (γ_0) est une parabole dont on déterminera l'axe et le sommet.

III

Soit les surfaces (S) d'équation $x^2 - y^2 + 2zx - 2yz + 2x - \frac{1}{3} = 0$ et (σ) d'équation $x^2 - y^2 + 2zx - 2yz = 0$.

1°) Montrer que (σ) est une quadrique dégénérée en l'union de deux plans dont on donnera les équations. Soit D l'intersection de ces deux plans.

2°) Déterminer le point Ω de (S) en lequel le plan tangent à (S) est orthogonal à D.

3°) Soit (C) le "contour apparent en projection sur xOz parallèlement à Oy" de (S). Donner la nature de (C).

4°)a) Réduire dans le groupe orthogonal la forme quadratique Φ définie par $\Phi(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2zx - 2yz$.
On désigne par B la base orthonormée trouvée.

b) Déterminer l'équation de (S) dans le repère $\{ \Omega, B \}$, où l'on note X, Y, Z les coordonnées.
Donner la nature de (S).

c) Montrer que (S), privée de son intersection avec le plan $X\Omega Y$, est engendrée par une famille de droites parallèles à un plan fixe P et s'appuyant sur deux droites fixes D_1 et D_2.
On donnera, dans le repère $\{ \Omega, B \}$, une équation cartésienne de P et deux équations cartésiennes pour chacune des droites D_1 et D_2.

ALGEBRE

(durée 2 h 30 environ)

n.b. : les parties I, II et III sont indépendantes, la partie IV utilise les résultats de la partie III

On note **R** l'ensemble des réels et **N** l'ensemble des entiers naturels.

Soit $M_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à éléments réels.

Soit $S_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices à éléments réels, carrées d'ordre n et symétriques.

Soit E_n l'espace vectoriel formé des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n-1$ et du polynôme nul.

I

1°) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Justifier sans calcul que cette matrice est diagonalisable sur **R**.

b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

c) Déterminer une base de $\mathbf{R}^3$, orthonormée pour le produit scalaire canonique et formée de vecteurs propres de A, ainsi qu'une matrice diagonale D semblable à A.

d) En déduire l'existence d'une matrice $B \in S_3(\mathbf{R})$, ayant toutes ses valeurs propres > 0 et telle que $B^2 = A$.

2°) Soit $A \in S_n(\mathbf{R})$ une matrice telle que ses valeurs propres vérifient : $0 < \lambda_1 \leq .... \leq \lambda_n$.
Montrer qu'il existe une matrice $B \in S_n(\mathbf{R})$, ayant toutes ses valeurs propres > 0 et telle que $B^2 = A$.

3°) Soit $A \in S_3(\mathbf{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{4} \\ \sqrt{3} & \sqrt{4} & \sqrt{5} \end{pmatrix}$

On définit sur E_3 la forme bilinéaire φ par : $\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

a) Montrer que φ est un produit scalaire sur E_3.

b) Que représente A pour ce produit scalaire ?

c) En déduire qu'il existe une matrice $B \in S_3(\mathbf{R})$, ayant toutes ses valeurs propres > 0 et telle que $B^2 = A$.

II

On se place dans E_4.

1°) Soit $\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,dx$ et soit $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, I_n converge et calculer I_n.

b) Montrer que φ est un produit scalaire sur E_4.
Donner la matrice de φ sur la base canonique $\{1, X, X^2, X^3\}$ de E_4.

c) En utilisant la méthode de Schmidt, construire une base de E_4 orthonormée pour φ.

2°)a) Déterminer une base de $E_2^{\perp}$, orthogonal de E_2 dans E_4.

b) Déterminer la matrice P, sur la base canonique de E_4, de p_2, projection orthogonale de E_4 dans E_2.

c) Déterminer une matrice $M \in M_4(\mathbf{R})$ telle que $M^2 = P$.

III

Soit E un espace préhilbertien réel, dont le produit scalaire est noté $< , >$ et la norme associée $\| \|$.

Soit S l'ensemble des opérateurs symétriques sur E.

1°) Soit $u \in S$; on définit Φ_u par $\Phi_u(x) = < u(x),x >$.

a) Montrer que Φ_u est une forme quadratique sur E et déterminer sa forme polaire φ_u.

b) Montrer que si $\Phi_u(x) = 0$ pour tout x de E, alors $u = 0$.

Montrer que si $u^2 = 0$, alors $u = 0$.

2°) On considère u et v deux éléments de S.

a) Montrer que $u \circ v \in S$ si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.

Donner dans $S_2(\mathbb{R})$ un exemple de 2 matrices symétriques dont le produit n'est pas symétrique.

b) On dit que $u \leq v$ lorsque $\Phi_u \leq \Phi_v$ sur E.

Vérifier que " $\leq$ " est une relation d'ordre dans S.

Calculer $\Phi_{\lambda u}$ et Φ_{u+v} et montrer que u est ≥ 0 si et seulement si Φ_u est positive.

Justifier les implications suivantes : si $u \geq 0$, alors $\lambda u \geq 0$ pour tout $\lambda \geq 0$.

si $u \geq v$, alors $-v \geq -u$.

si $u \geq v$, alors $u+w \geq v+w$, pour tout $w \in S$.

Montrer que $u^2 \geq 0$.

3°) On suppose E de dimension finie n. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de u, élément de S.

a) Montrer que $u \geq 0$ si et seulement si toutes les valeurs propres de u sont ≥ 0.

b) On suppose ici que $|\lambda_1| \leq \ldots \leq |\lambda_n|$. Montrer que $\sup_{\|x\|=1} \| u(x) \| = |\lambda_n|$.

On pose $\| u \| = \sup_{\|x\|=1} \| u(x) \|$. Montrer que $u \to \| u \|$ est une norme sur S.

Montrer que $\| u(x) \| \leq \| u \| . \| x \|$ pour tout x de E.

c) Soit $u \geq 0$, élément de S.En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour une forme quadratique positive, montrer que $\| u(x) \|^2 \leq \| u \| . < u(x),x >$ pour tout x de E.

IV

On utilise les notations du III. On note Id_E l'application identique dans E.

Dans cette partie, E est euclidien de dimension n, muni d'une base orthonormée ϑ.

On dit que la suite (x_n) d'éléments de E converge vers x lorsque la suite $(\| x_n - x \|)$ converge vers 0.

Soit une suite (u_n) d'éléments de S telle que : $u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_n \leq \ldots \leq v$, où v est un élément fixé de S.

1°) Montrer que, en tout point $x \in E$, la suite $(\Phi_{u_n}(x))$ converge; on note $\Phi(x)$ sa limite. Montrer que Φ est une forme quadratique sur E, dont on donnera la forme polaire φ en fonction de Φ.

2°) Soit u l'élément de S tel que sa matrice sur ϑ soit égale à la matrice de Φ sur ϑ. Montrer que, pour tout $x \in E$, la suite $(u_n(x))$ converge et a pour limite u(x).